Lois de Gauss

Introduction

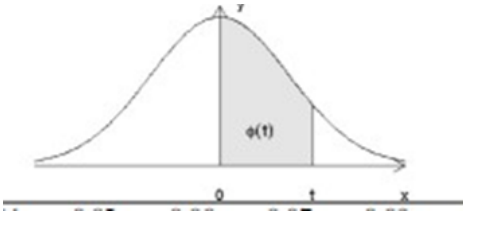
La loi de Gauss est la loi la plus couramment rencontrée dans la réalité. Elle représente tous types de phénomènes plus variés les uns que les autres.

La courbe de Gauss est représentée par une courbe en cloche unimodale, symétrique, centrée sur 0. L'aire sous la courbe représente une **densité de probabilité** (et non pas une probabilité).

→ C'est à dire que pour un intervalle donné, la valeur affichée sur la table est la probabilité d'être dans l'intervalle.

I. TABLE DU Φ

Exemple 1 **: (On suppose que l'on suit une loi normale centrée réduite). On prend une valeur au hasard dans un échantillon. Quelle est la probabilité que cette valeur soit comprise dans l'intervalle [0 ; 3,15] ?**



Voici l'intervalle [0 ; 3,15] (en gris).

Pour trouver **3,15** dans la table, on décompose en 3,1 (les dixièmes en lignes) + 0,05 (les centièmes en colonnes). On croise à l'intersection de la colonne et de la ligne, et on trouve **0,4992**

→ Donc la probabilité que la valeur prise au hasard dans l'échantillon soit comprise dans l'intervalle [0 ; 3,15] est de **0,4992.**

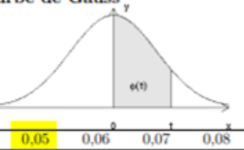
Par ailleurs, vous venez d'apprendre à utiliser la table du φ. Cette table affiche les densités de probabilité pour l'intervalle [0 ; +∞]. Les valeurs de la table seront comprises entre 0 et 0,5. Cependant, on a affirmé dans l'exemple précédent que l'échantillon suivait une loi normale **CENTREE** (μ=moyenne des valeurs = 0) et **REDUITE** (σ=écart type=1). Pourtant, dans la réalité, les lois normales que l'on rencontre sont rarement centrées et réduites.

→ On ne peut pas lire directement sur la table, il faut alors Centrer et Réduire la loi (=effectuer un changement de variable).

Aires sous la courbe de Gauss

Table de $\phi(t)$

$$\phi(t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
4,0	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000

II. TABLE DU π

La table de π correspond aux densités de probabilités en partant de -∞ jusqu'à +∞. Les valeurs sont comprises dans l'intervalle [0 ;0,999].

Exemple 2 **: On a un lot de tablettes de chocolat, dont la masse moyenne est de 100 grammes. L'écart type vaut 10. Quel est la probabilité pour une tablette d'être en-dessous de 120 grammes ? On suppose que l'on suit une loi Normale.**

Résolution : L'énoncé nous demande P(X<120) mais on ne peut pas lire 120 dans la table :

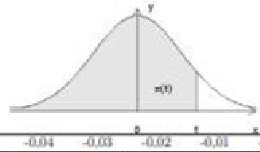
→ Il faut centrer et réduire la loi. Pour cela, il faut connaître une formule : t = X−μ. Dans cet exercice, X vaut 120 (c'est la valeur demandée dans l'énoncé).

- **Centrer :** Pour centrer, on soustrait la moyenne à X : X − μ = 120-100=20
- **Réduire :** Pour réduire, on divise X − μ par σ : X−μ = 20/10 = 2.

Ainsi, on peut lire dans la table P(X<2). Une table très pratique à utiliser pour la probabilité P(X<k) est la table de π.

Table de $\pi(t)$

$$\pi(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$



t	-0,09	-0,08	-0,07	-0,06	-0,05	-0,04	-0,03	-0,02	-0,01	-0,00
-3,0	0,001 0	0,001 0	0,001 1	0,001 1	0,001 1	0,001 2	0,001 2	0,001 3	0,001 3	0,001 3
-2,9	0,001 4	0,001 4	0,001 5	0,001 5	0,001 6	0,001 6	0,001 7	0,001 8	0,001 8	0,001 9
-2,8	0,001 9	0,002 0	0,002 1	0,002 1	0,002 2	0,002 3	0,002 3	0,002 4	0,002 5	0,002 6
-2,7	0,002 6	0,002 7	0,002 8	0,002 9	0,003 0	0,003 1	0,003 2	0,003 3	0,003 4	0,003 5
-2,6	0,003 6	0,003 7	0,003 8	0,003 9	0,004 0	0,004 1	0,004 3	0,004 4	0,004 5	0,004 7
-2,5	0,004 8	0,004 9	0,005 1	0,005 2	0,005 4	0,005 5	0,005 7	0,005 9	0,006 0	0,006 2
-2,4	0,006 4	0,006 6	0,006 8	0,006 9	0,007 1	0,007 3	0,007 5	0,007 8	0,008 0	0,008 2
-2,3	0,008 4	0,008 7	0,008 9	0,009 1	0,009 4	0,009 6	0,009 9	0,010 2	0,010 4	0,010 7
-2,2	0,011 0	0,011 3	0,011 6	0,011 9	0,012 2	0,012 5	0,012 9	0,013 2	0,013 6	0,013 9
-2,1	0,014 3	0,014 6	0,015 0	0,015 4	0,015 8	0,016 2	0,016 6	0,017 0	0,017 4	0,017 9
-2,0	0,018 3	0,018 8	0,019 2	0,019 7	0,020 2	0,020 7	0,021 2	0,021 7	0,022 2	0,022 8
-1,9	0,023 3	0,023 9	0,024 4	0,025 0	0,025 6	0,026 2	0,026 8	0,027 4	0,028 1	0,028 7
-1,8	0,029 4	0,030 1	0,030 7	0,031 4	0,032 2	0,032 9	0,033 6	0,034 4	0,035 1	0,035 9
-1,7	0,036 7	0,037 5	0,038 4	0,039 2	0,040 1	0,040 9	0,041 8	0,042 7	0,043 6	0,044 6
-1,6	0,045 5	0,046 5	0,047 5	0,048 5	0,049 5	0,050 5	0,051 6	0,052 6	0,053 7	0,054 8
-1,5	0,055 9	0,057 1	0,058 2	0,059 4	0,060 6	0,061 8	0,063 0	0,064 3	0,065 5	0,066 8
-1,4	0,068 1	0,069 4	0,070 8	0,072 1	0,073 5	0,074 9	0,076 4	0,077 8	0,079 3	0,080 8
-1,3	0,082 3	0,083 8	0,085 3	0,086 9	0,088 5	0,090 1	0,091 8	0,093 4	0,095 1	0,096 8
-1,2	0,098 5	0,100 3	0,102 0	0,103 8	0,105 6	0,107 5	0,109 3	0,111 2	0,113 1	0,115 1
-1,1	0,117 0	0,119 0	0,121 0	0,123 0	0,125 1	0,127 1	0,129 2	0,131 4	0,133 5	0,135 7
-1,0	0,137 9	0,140 1	0,142 3	0,144 6	0,146 9	0,149 2	0,151 5	0,153 9	0,156 2	0,158 7
-0,9	0,161 1	0,163 5	0,166 0	0,168 5	0,171 1	0,173 6	0,176 2	0,178 8	0,181 4	0,184 1
-0,8	0,186 7	0,189 4	0,192 2	0,194 9	0,197 7	0,200 5	0,203 3	0,206 1	0,209 0	0,211 9
-0,7	0,214 8	0,217 7	0,220 6	0,223 6	0,226 6	0,229 6	0,232 7	0,235 8	0,238 9	0,242 0
-0,6	0,245 1	0,248 3	0,251 4	0,254 6	0,257 8	0,261 1	0,264 3	0,267 6	0,270 9	0,274 3
-0,5	0,277 6	0,281 0	0,284 3	0,287 7	0,291 2	0,294 6	0,298 1	0,301 5	0,305 0	0,308 5
-0,4	0,312 1	0,315 6	0,319 2	0,322 8	0,326 4	0,330 0	0,333 6	0,337 2	0,340 9	0,344 6
-0,3	0,348 3	0,352 0	0,355 7	0,359 4	0,363 2	0,366 9	0,370 7	0,374 5	0,378 3	0,382 1
-0,2	0,385 9	0,389 7	0,393 6	0,397 4	0,401 3	0,405 2	0,409 0	0,412 9	0,416 8	0,420 7
-0,1	0,424 7	0,428 6	0,432 5	0,436 4	0,440 4	0,444 3	0,448 3	0,452 2	0,456 2	0,460 2
-0,0	0,464 1	0,468 1	0,472 1	0,476 1	0,480 1	0,484 0	0,488 0	0,492 0	0,496 0	0,500 0
t	+0,00	+0,01	+0,02	+0,03	+0,04	+0,05	+0,06	+0,07	+0,08	+0,09
+0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
+0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
+0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
+0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
+0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
+0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
+0,6	0,725 7	0,729 1	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
+0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
+0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
+0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,826 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
+1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
+1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
+1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
+1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
+1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
+1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
+1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
+1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
+1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
+1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
+2,0	0,977 2	0,977 8	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
+2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
+2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
+2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
+2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
+2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
+2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
+2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
+2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
+2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6
+3,0	0,998 7	0,998 7	0,998 7	0,998 8	0,998 8	0,998 9	0,998 9	0,998 9	0,999 0	0,999 0

Même chose que pour la table précédente, on lit la valeur à l'intersection de la ligne et de la colonne. On trouve 0,997 2.

Donc P(t<2) = 0,9972 ou P(X<120 g) = 0,997 2.

Exemple 3 **: Quelle est la probabilité que la masse d'une tablette de chocolat soit supérieure ou égale à 120g ?**

Résolution : On prend la probabilité complémentaire : P(X≥120) =1-P(X<120) =1-0,9972 =**0,0028**

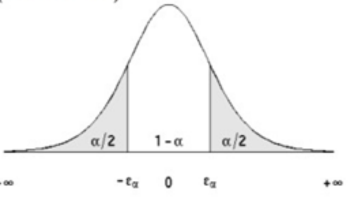
III. TABLE DE L'ECART REDUIT

Exemple 4 : **Quelles seraient les masses des tablettes de chocolat telles que 95% des tablettes de chocolat soient supérieures/inférieures ?**

Résolution : Cet énoncé demande d'utiliser la Table de **l'écart réduit.**

Table de l'écart réduit (loi normale)

La table donne le nombre positif ε_α pour que la probabilité que l'écart réduit dépasse, en valeur absolue, cette valeur ε_α, soit égale à α ; ainsi, la probabilité que l'écart réduit se trouve à l'extérieure de l'intervalle $[-\varepsilon_\alpha ; \varepsilon_\alpha]$ vaut α.



Comment lire la table ? Soit un intervalle [−εα ; εα]. La zone grisée correspond à la densité de probabilité des valeurs que l'on ne veut pas inclure dans [−εα ; εα].

Cette probabilité s'appelle risque α et peut également être exprimée sous forme de pourcentage. Pour un α donné, la table nous donne εα (la valeur seuil). Ainsi, on peut en déduire les bornes de [−εα ; εα]. Dans cet exercice, on nous demande que 95% des valeurs soient comprises dans l'intervalle.

→ La probabilité α qu'elles n'y soient pas est donc de 5% = 0,05

α	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	∞	2,575 829	2,326 348	2,170 090	2,053 749	1,959 964	1,880 794	1,811 911	1,750 686	1,695 398
0,1	1,644 854	1,598 193	1,554 774	1,514 102	1,475 791	1,439 531	1,405 072	1,372 204	1,340 755	1,310 579
0,2	1,281 552	1,253 565	1,226 528	1,200 359	1,174 987	1,150 349	1,126 391	1,103 063	1,080 319	1,058 122
0,3	1,036 433	1,015 222	0,994 458	0,974 114	0,954 165	0,934 589	0,915 365	0,896 473	0,877 896	0,859 617
0,4	0,841 621	0,823 894	0,806 421	0,789 192	0,772 193	0,755 415	0,738 847	0,722 479	0,706 303	0,690 309
0,5	0,674 490	0,658 838	0,643 345	0,628 006	0,612 813	0,597 760	0,582 842	0,568 051	0,553 385	0,538 836
0,6	0,524 401	0,510 073	0,495 850	0,481 727	0,467 699	0,453 762	0,439 913	0,426 148	0,412 463	0,398 855
0,7	0,385 320	0,371 856	0,358 459	0,345 126	0,331 853	0,318 639	0,305 481	0,292 375	0,279 319	0,266 311
0,8	0,253 347	0,240 426	0,227 545	0,214 702	0,201 893	0,189 118	0,176 374	0,163 658	0,150 969	0,138 304
0,9	0,125 661	0,113 039	0,100 434	0,087 845	0,075 270	0,062 707	0,050 154	0,037 608	0,025 069	0,012 533

Même chose, on croise à l'intersection de la ligne et de la colonne et on trouve **εα = 1,96** (arrondi).

Comme toutes les autres tables de la courbe de Gauss, elle donne des valeurs pour une loi normale CENTREE et REDUITE. Il faut donc faire la démarche inverse de celle qui vise à centrer et réduire la loi.

→ « Décentrer » et « Étendre » la loi pour retrouver des valeurs de tablettes de chocolat.

Comment Décentrer et Étendre ?

Pour centrer et réduire, on avait opéré ce calcul : X−μ = valeur centrée réduite εα.

Pour décentrer et étendre, on fait le calcul en sens inverse : εα = X−μ

- **Donc εα* σ = X − μ**
- **Et X = (εα* σ) + μ**

Dans notre exemple : (1,96*10) + 100 = 119,6 g

Même chose pour **$-\varepsilon_\alpha$** : **$(-\varepsilon_\alpha * \sigma) + \mu$** = (-1,96*10) + 100 = 80,4

L'intervalle $[-\varepsilon_\alpha ; \varepsilon_\alpha]$ = [80,4 ; 119,6]. Donc 95% des tablettes de chocolat ont une masse comprise dans cet intervalle.

Astuce : pour savoir quelle table utiliser, n'hésites pas à te référer aux petits schémas affichés en haut de page qui montrent quels intervalles sont couverts ([0 ; + ∞] ou [- ∞ ; 0] ou [-εα ; εα])!