

Les nombres complexes

MATH

A quoi servent les nombres complexes ?

Les nombres complexes permettent de :

- **Compléter les réels** : toute équation polynomiale a au moins une solution dans \mathbb{C} (théorème fondamental de l'algèbre). Les nombres complexes ont en effet été introduits pour résoudre toutes les équations, même celles sans solutions réelles.
→ Exemple : $x^2+1=0$ n'a pas de solution réelle, mais admet deux solutions complexes : $x=i$ et $x=-i$
- **Relier les fonctions trigonométriques et exponentielles** grâce à la formule d'Euler $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.
- **Faciliter les calculs** (produits, rotations, oscillations, signaux périodiques, etc.) en remplaçant des sommes et produits trigonométriques compliqués par de simples exponentielles.

Définition générale :

Soit $\mathbb{C} = \{ z = x + iy, (x;y) \in \mathbb{R}^2, \text{ avec } i \text{ le symbole imaginaire, défini par } i^2 = -1$

L'écriture $z = x + iy$ est appelée **forme algébrique** de z .

On pose : $\begin{cases} \text{Re}(z) = x \in \mathbb{R} \text{ la partie réelle} \\ \text{Im}(z) = y \in \mathbb{R} \text{ la partie imaginaire} \end{cases}$

Forme algébrique

L'écriture algébrique d'un nombre complexe est **unique**.

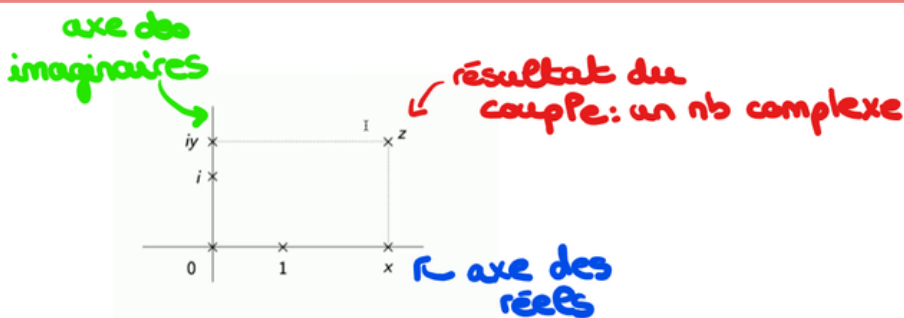
Conséquences : égalité de deux nombres complexes :

$$z = z' \Leftrightarrow x + iy = x' + iy' \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

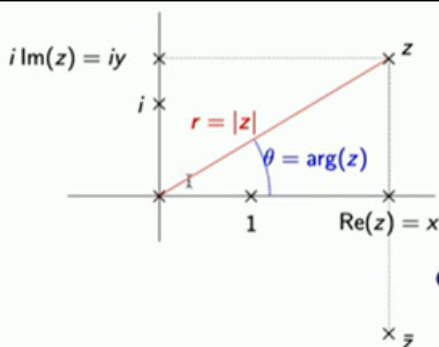
$$\text{Cas particulier : } z = 0 \Leftrightarrow x + iy = 0 + i0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Représentation graphique

Le **plan complexe** (ou plan d'Argand) permet de représenter chaque nombre complexe $z=x+iy$ par le **point de coordonnées** (x,y) .



Définitions importantes



Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ un nombre complexe. On note

- 1 $\text{Re}(z) := x$ la **partie réelle** de z ,
- 2 $\text{Im}(z) := y$ la **partie imaginaire** de z ,
- 3 $\bar{z} := x - iy$ le **conjugué** de z ,
- 4 $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ le **module** de z .

- 3 $\text{arg}(z) =$ angle au sommet formé par le triangle $z, 0, 1$. (Défini uniquement à 2π près.) C'est un **argument** de z .



- Le **module de z** est la distance entre le point 0 et le point z : $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- L'**argument de z** $\arg(z) = \theta$ est l'angle θ formé entre l'axe des réels et le segment [Oz]. L'argument n'est pas unique : si θ est un argument, alors $\theta + 2k\pi$ en est aussi un argument.
- Le **conjugué** est le symétrique de z par rapport à l'axe des réels : $\bar{z} = x - iy$

Opérations sur les complexes

On considère les nombres complexes : $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$

Additions et multiplications

→ On peut additionner et multiplier des nombres complexes comme d'habitude en utilisant la règle : $i^2 = -1$

On a donc : $z + z' = (x + x') + i(y + y')$ et $z * z' = (xx' - yy') + i(xy' + yx')$

Interprétation géométrique de la somme : translation (comme une addition de vecteurs).

Interprétation géométrique du produit : la multiplication par i correspond à une rotation d'angle $\pi/2$ (= de 90° dans le sens direct).

L'inverse

→ Pour tout nombre complexe non-nul $z = x + iy$, on peut calculer l'inverse de z :

$$\frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{-y}{x^2 + y^2}i.$$



→ L'astuce pour calculer l'inverse d'un nombre complexe, c'est de multiplier par le conjugué en haut ET en bas (ça vous permet d'enlever les « i » au dénominateur).

De façon plus concise, en observant que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a : $z\bar{z} = |z|^2$.

Donc pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a : $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

Forme polaire

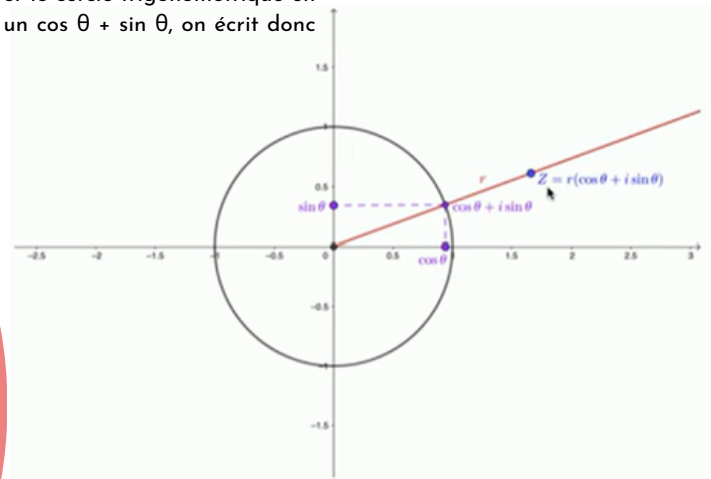
On prend un point z dans le plan complexe. On trace un cercle trigonométrique, et ensuite vous tracez la demi-droite qui part de 0 et passant par z : cette demi-droite va alors intercepter le cercle trigonométrique en un unique point. Or, tous les points du cercle trigonométrique sont définis par un $\cos \theta + i \sin \theta$, on écrit donc cet unique point sous cette forme.

Donc le point z est égal à $r(\cos \theta + i \sin \theta)$, r étant la longueur entre le point d'intersection de la droite avec le cercle trigonométrique et le point z :

Pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$ non nul, il existe $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta)$. Il s'agit de la **forme trigonométrique de z**.

Où r est le module de z : $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Et θ est un argument de z (il y a une infinité d'arguments possibles à chaque fois qu'on « fait un tour » de 2π).



Ut' Prépares

Forme exponentielle (notation d'Euler)

On introduit la notation : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

De sorte que : $z = re^{i\theta}$ (on remplace $\cos\theta + i\sin\theta$ par $e^{i\theta}$ dans la formule $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$)

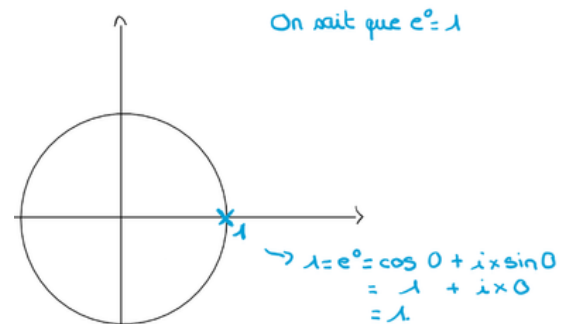
Valeurs remarquables :

- $e^{i0} = 1$
- $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$
- $e^{i\pi} = -1$
- $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$

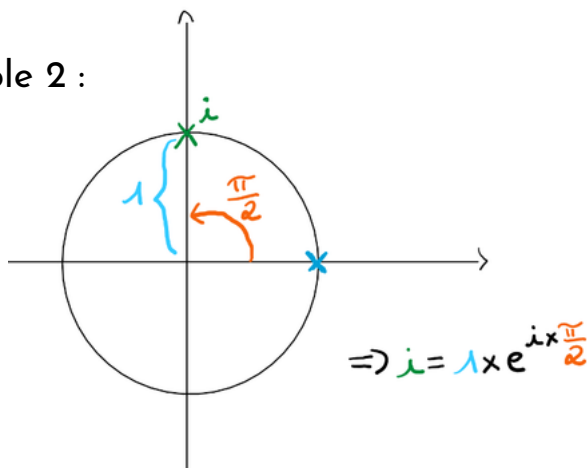
Exemples

- 1) $1 = e^0 = 1 \times e^{i0}$.
- 2) $i = 0 + 1 \times i = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \times i = e^{i\frac{\pi}{2}}$
- 3) $-1 = -1 + 0i = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = e^{i\pi}$.
- 4) $1 + i = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

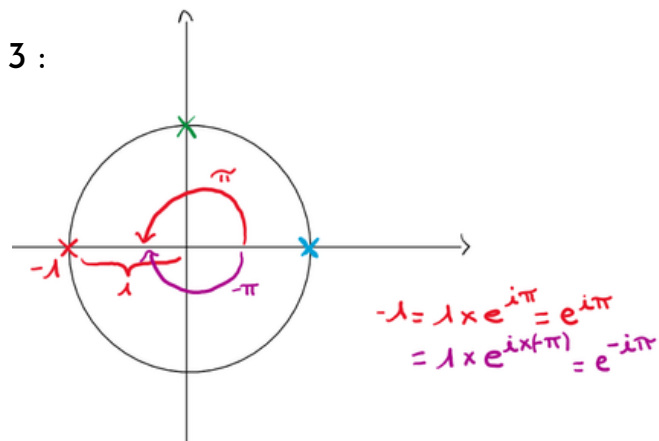
Exemple 1 :



Exemple 2 :



Exemple 3 :



Exemple 4 :

Rappel : on trouve que la demi-droite entre l'origine et le point z (=le module de z) est égal à $\sqrt{2}$ grâce à la formule $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, ce qui correspond en fait au théorème de Pythagore.

