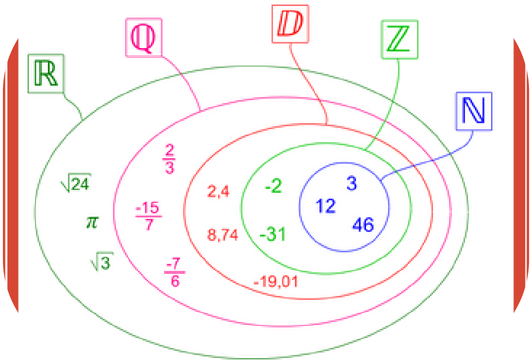
Les nombres/ dérivées composées

MATHS

Rappels importants

Les ensembles de nombres :

ℕ : entiers naturels
ℤ : entiers relatifs
ℚ : nombres rationnels
ℝ : nombres réels



En PASS/ LAS, on travaillera majoritairement dans ℝ, qui représente l'ensemble des nombres réels.

Règles de calcul sur les puissances :

- ***multiplication de puissances :*** $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- ***division de puissances :*** $a^m \div a^n = a^{m-n}$
- ***puissance d'une puissance :*** $(a^m)^n = a^{m \times n}$

$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{(a \times b)}$

$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$

$a^{-n} = 1 / a^n$

2. Fonctions composées

Qu'est-ce qu'une fonction composée ?

Une fonction composée, c'est quand on applique 2 fonctions l'une après l'autre :
Si nous avons f(x) et g(x), la fonction composée s'écrit :
$(f \circ g)(x) = f(g(x))$

Attention : l'ordre de composition est important !

On peut inverser le sens :

$(x^2+x)/(x^2+x+1)$
$g(f(x))=g(x^2+x)$
$(g \circ f)(x)=g(f(x))$

$(g \circ f)(x)=g(f(x))$
$g(f(x))=g(x^2+x)$
$(x^2+x)/(x^2+x+1)$

Ut' Prépares

Exemple de fonctions composées :

Exemple :
On a : $g(x) = 2x + 1$ et $f(x) = x^2$
Alors la fonction composée $f \circ g$ est :
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x + 1) = (2x + 1)^2$

Autre exemple :

On a : $f(x)= x^2+x$ et $g(x)=x/(x+1)$
$(f \circ g)(x)=f(g(x))$
On remplace donc la variable x par l'expression de g :
$f(g(x))=f(x/(x+1))$
Alors : $(f \circ g)(x)=(x/(x+1))^2 + x/(x+1)$

3. Dérivation d'une fonction composée

Les dérivées de quelques fonctions usuelles :

Très important à connaitre !

$f(x)$	$f'(x)$	Intervalle de validité
k	0	$]-\infty; +\infty[$
x	1	$]-\infty; +\infty[$
$x^n, n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$]-\infty; +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$\frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^*$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0; +\infty[$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$]0; +\infty[$
e^x	e^x	$]-\infty; +\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$]-\infty; +\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$]-\infty; +\infty[$

Comment dériver une fonction composée ?

Si $y = f(g(x))$,
alors $y' = f'(g(x)) \times g'(x)$
Autrement dit :
1. On dérive la fonction extérieure (f) en gardant g(x) à l'intérieur.
2. Puis on multiplie par la dérivée de la fonction intérieure (g'(x))

Exemple :
Soit : $f(x) = (3x^2 + 1)^5$
On reconnaît une fonction composée : une fonction puissance appliquée à un polynôme.
- La fonction extérieure est : $u \mapsto u^5$
- La fonction intérieure est : $u(x) = 3x^2 + 1$

On dérive :
$f'(x) = 5(3x^2 + 1)^4 \times (6x)$
On a alors : $f'(x) = 30x(3x^2 + 1)^4$

Ut' Prépares